

Éléments de mécanique du point matériel

Quelques propriétés des ellipses

Propriétés des mouvements à accélération centrale

Loi des aires et vitesse aréolaire

Formules de Binet

Licence : CC-by-sa

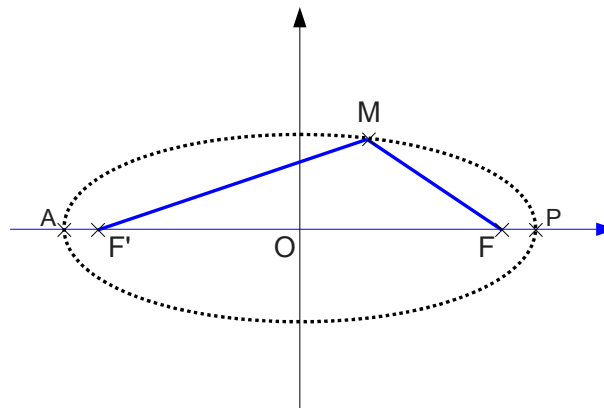
Auteur : Eric Bachard

Date: 10 avril 2021

Propriétés des ellipses

1. Propriétés des ellipses

1.1 Construction d'une ellipse : une ellipse E est une figure plane.



On appelle F et F' les foyers de l'ellipse.

En pratique, un jardinier utilise un fil et 2 piquets pour dessiner un parterre de fleurs de forme elliptique : la distance entre les 2 piquets (= les foyers) doit être supérieure à la longueur de l'ellipse (exemple : 3/2 ~ ordre de grandeur pour en dessiner une facilement).

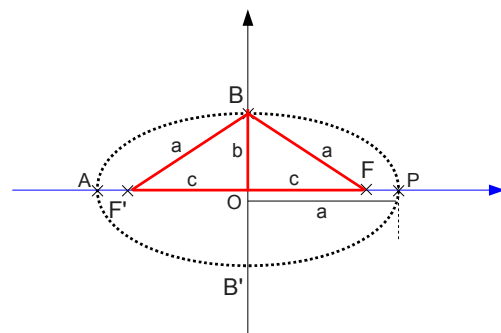
En optique, pour valider le modèle des premiers lasers, on a utilisé un miroir de forme elliptique : toute la lumière qui partait d'un foyer, après réflexion, se concentrait dans l'autre foyer, ce qui a permis d'obtenir l'inversion de population nécessaire à l'émission amplifiée par émission stimulée (acronyme de LASER en anglais).

Et tout point M appartenant à l'ellipse vérifie :

$$FM + FM' = 2a = c^{te}$$

1.2 Autres propriétés

OP = a est appelé le 1/2 grand axe, et b le 1/2 petit axe de l'ellipse. Une ellipse n'a pas forcément ses axes parallèles à ceux du repère dans lequel est dessinée.



On a aussi : $PF = a - c$ et $PF' = a + c$
 $\Rightarrow PF + PF' = 2a = 2 PO \Rightarrow OP = a$

Par construction $BF = BF'$, et comme $BF + BF' = 2a$, $BF = a$.

Si on pose $OF = c = OF'$, alors, $b^2 + c^2 = a^2$.

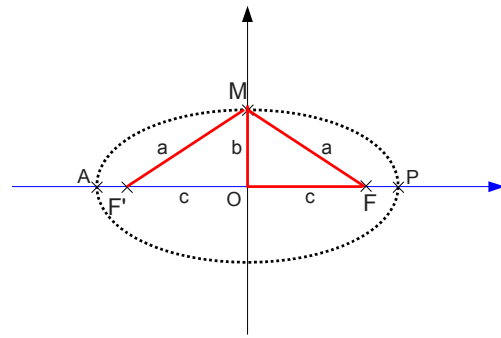
Par définition : on appelle excentricité e d'une ellipse le rapport $e = \frac{c}{a}$. L'excentricité e est comprise entre 0 et 1. Une ellipse d'excentricité e = 0 est un cercle (F est alors confondu avec F').

1.3 Relations à connaître (ou savoir retrouver)

$$e = \frac{c}{a}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + (ea)^2 \iff b^2 = a^2(1 - e^2) = pa$$

Avec $p = a(1 - e^2)$, p étant appelé paramètre de l'ellipse.



Exemple : pour le mouvement elliptique de rotation de la Terre autour du Soleil, **P est appelé périhélie** et **A est appelé aphélie** de la trajectoire.

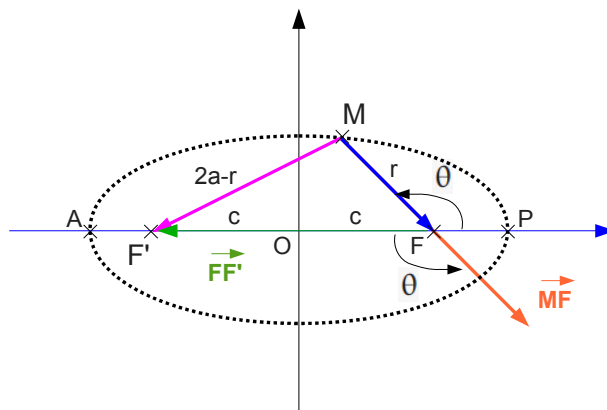
Autres propriétés importantes: $FP = a - c = a(1 - e)$ $FA = a + c = a(1 + e)$

1.4 Équation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes

Pour une ellipse centrée sur l'origine O du repère (Ox, Oy) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1.5 Expression des coordonnées d'un point de l'ellipse avec origine au foyer F



Détermination de $r(\theta)$ avec origine au foyer F

On va utiliser la relation de Chasles et une propriété des vecteurs : $\vec{MF}' = \vec{MF} + \vec{FF}'$

$$\iff (\vec{MF} + \vec{FF}') \cdot (\vec{MF} + \vec{FF}') = MF^2 + FF'^2 + 2MF \cdot FF' \cos(\vec{MF}, \vec{FF}') = MF'^2, \text{ avec}$$

$$\|\vec{MF}\| = r, \|\vec{FF}'\| = 2c, \|\vec{MF}'\| = 2a - r; MF^2 = r^2; FF'^2 = c^2 \text{ et } MF'^2 = (2a - r)^2.$$

Remarque importante : cette propriété ne dépend pas de l'origine, grâce aux propriétés des vecteurs.

Pour l'angle entre \vec{MF} et \vec{FF}' , \vec{MF} est redessiné en orange sur le dessin, en superposant les deux origines. On voit facilement (angles internes) que l'angle entre les deux vecteurs vaut θ .

$$\iff r^2 + 4c^2 + 2r \cdot (2c) \cos \theta = (2a - r)^2 \iff r^2 + 4c^2 + 2r \cdot (2c) \cos \theta = 4a^2 - 4ar + r^2$$

$$\iff 4c^2 + 4rc \cos \theta = 4a^2 - 4ar \iff c^2 + rc \cos \theta = a^2 - ar \iff r(a + c \cos \theta) = a^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \theta} \Leftrightarrow \frac{a^2(1 - (\frac{c}{a})^2)}{a + c \cos \theta} \Leftrightarrow r = \frac{a^2(1 - e^2)}{a + c \cos \theta} \Leftrightarrow r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \text{ (en divisant numérateur et dénominateur par } a \neq 0 \text{)}$$

Soit finalement, $r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$ avec $p = a(1 - e^2)$ appelé paramètre de l'ellipse.

Remarque : on utilise aussi quelquefois l'équation polaire $r = f(\theta)$ avec l'origine au second foyer, ce qui revient à inverser les rôles de P et A, points caractéristiques, la circulation se faisant toujours dans le sens trigonométrique.

2 Mouvements à accélération centrale

2.1 Lors un mouvement à accélération centrale, le mouvement est plan

Se dit d'un mouvement pour lequel l'accélération est toujours dirigée vers le centre de la trajectoire.

Soit : $\vec{OM} = r \vec{u}_r = \vec{r}$ colinéaire à $\vec{a} = -a \vec{u}_r \Rightarrow \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{r} \wedge d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{v})}{dt} - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v}}_{=\vec{0}} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{v})}{dt} - \vec{0} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{v})}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{cte} \quad (1)$$

Remarque : on rappelle que $\frac{d(\vec{r} \wedge \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \frac{\vec{r} \wedge d\vec{v}}{dt}$

D'après (1), si $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est constant, il l'est en module et en direction. Sachant de plus que à chaque instant, $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est \perp à \vec{r} et à \vec{a} , alors le mouvement est inscrit dans un plan perpendiculaire à \vec{r} (ou \vec{a}) et \vec{v} .

2.2 Loi des aires et vitesse aréolaire

On repart du vecteur position : $\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$.

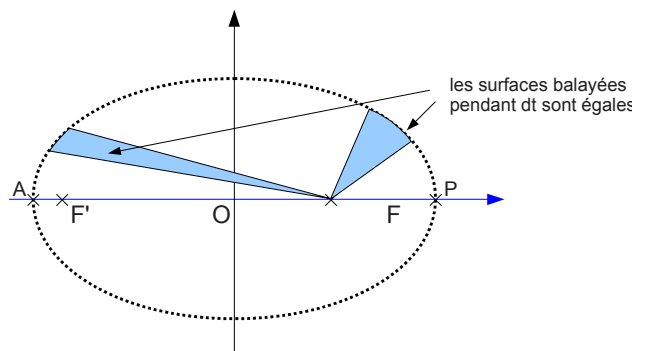
La vitesse est donnée par : $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$.

Sachant que $\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{cte}$, on peut écrire : $\vec{r} \wedge \vec{v} = r \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = r^2 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

Et on a $r \cdot r \dot{\theta} = r \cdot r \frac{d\theta}{dt} = c^{te}$ $C = r^2 \dot{\theta}$

$\Leftrightarrow r^2 \dot{\theta} = c^{te}$. En comparaison, l'aire balayée pendant dt, appelée aussi vitesse aréolaire, vaut

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2} \quad \text{Loi des aires (C est appelée constante des aires)}$$



3 Formules de Binet

Pour $\vec{C} \neq \vec{0}$, on va introduire les formules de Binet, dans la base polaire associée au référentiel choisi.

On rappelle que $r^2 \dot{\theta} = C \iff \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ (cette forme sera utile par la suite).

On part des définitions de $\vec{OM} = r \vec{u}_r$, $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r$ (pas de composante tangentielle, car $v = c^{te}$).

Ensuite, l'idée consiste à éliminer le temps en ne faisant intervenir dans \vec{v} que $r(\theta)$ ainsi que ses dérivées premières et secondes dans les expressions de \vec{v} et \vec{a} , et à remplacer à la fin en faisant le changement de variable $u = \frac{1}{r}$. On posera $u' = \frac{du}{d\theta}$ et $u'' = \frac{d^2 u}{d\theta^2}$,

$$\vec{v} = \frac{d(\frac{1}{u})}{dt} \vec{u}_r + Cu \vec{u}_\theta = -\frac{\dot{u}}{u^2} \vec{u}_r + Cu \vec{u}_\theta$$

Calculons $\dot{u} = \frac{du}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = u' \cdot C u^2 \implies \vec{v} = -Cu' \vec{u}_r + Cu \vec{u}_\theta$ (car $\dot{\theta} = C u^2$)

Ensuite, on dérive \vec{v} par rapport au temps pour obtenir \vec{a} :

$$\vec{a} = C \left(\frac{d(-u')}{dt} \vec{u}_r - u' \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{u} \vec{u}_\theta - Cu \dot{\theta} \vec{u}_r \right) = C \left(-\dot{\theta} u'' \vec{u}_r - u' \dot{\theta} \vec{u}_\theta + u' \dot{\theta} \vec{u}_\theta - u \dot{\theta} \vec{u}_r \right)$$

$$\iff \vec{a} = C \left(-Cu^2 u'' \vec{u}_r - Cu^3 \vec{u}_r \right) \iff \vec{a} = -C^2 u^2 (u'' + u) \vec{u}_r$$

Soit finalement :

$$\begin{cases} \vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + Cu \vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \vec{u}_r \end{cases} \quad \text{ce sont les formules de Binet}$$

ATTENTION À NE PAS CONFONDRE :

$$u' = \frac{du}{d\theta} \text{ AVEC } \dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = C u^2 u' \quad \text{NI} \quad u'' = \frac{d^2 u}{d\theta^2} \text{ AVEC } \ddot{u} = \frac{d^2 u}{dt^2} !!$$

Exemple d'utilisation : retrouver l'équation d'une trajectoire en polaire.

On commence par écrire le principe fondamental de la dynamique.

Avec une force, cela donne : $\vec{F} = \frac{-GmM}{r^2} \vec{u}_r$

$\Rightarrow -GmM u^2 = -m \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) C^2 u^2 \Leftrightarrow \frac{GM}{C^2} = \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$ et on pose $p = \frac{C^2}{GM}$ (paramètre), ce qui

donne l'équation différentielle en u suivante : $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p}$, et dont la solution est

$$u = A \cos(\theta + B) + \frac{1}{p}$$

Ensuite, on pose $A = \frac{e}{p}$ en imposant à e (excentricité) d'être positif ou nul, et on note $B = -\theta_0$

Enfin, on peut écrire $u = \frac{e}{p} \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$ et on retrouve l'équation de l'ellipse avec origine à l'un de ses foyers vue précédemment.