

**Merci à Mme Thymiane Chasseboeuf, pour ses notes et ses dessins, qui ont grandement aidé à vous proposer une version numérisée de la correction des exercices 2, 3, 4, 5, 6 et 7.**

## Exercice 2

De l'eau circule dans un tube, à la température de 25°C avec un débit de 100 L/min. Cette eau sert à refroidir un réacteur nucléaire.

On souhaite déterminer le débit de chaleur transféré à l'eau ainsi que la température de l'eau à la sortie de ce tube.

### Données :

Pour l'eau :

- viscosité  $\mu = 10^{-3} Pa.s$
- capacité calorifique massique à pression constante :  $c_p = 4,18 kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
- masse volumique  $\rho = 1000 kg \cdot m^{-3}$
- conductibilité thermique  $\lambda = 0,64 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

Pour le tube : diamètre 2,5 cm, longueur 4,5m, température de surface interne constante et égale à 150°C.

### Calcul de la température de l'eau à la sortie du tube

#### Calculs préliminaires :

Expression de  $V'$  en  $m^3 \cdot s^{-1}$  : on note  $V'$  le débit volumique d'eau dans le tube, avec  $V' = 100 L/min$ . Soit :  $V' = \frac{100 L}{1 \text{ min}} = \frac{0,1 m^3}{60 s} = 1,666 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}$

Calcul de  $v_m$ , vitesse moyenne du fluide dans la conduite, en  $m \cdot s^{-1}$  :

$$v_m = \frac{V'}{S} = \frac{V'}{\pi R^2} = \frac{1,666 \cdot 10^{-3}}{\pi (1,25 \cdot 10^{-2})^2} = 3,39 m \cdot s^{-1}$$

Grâce à ces valeurs, on peut ensuite en déduire le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{v_m D}{\nu} = \frac{4V' D \rho}{\pi D^2 \mu} = \frac{4V' \rho}{\pi D \mu} = \frac{4 \cdot 1,666 \cdot 10^{-3} \cdot 1000}{\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}} = \frac{6,4 \cdot 4}{\pi \cdot 10} \simeq 81500 \Rightarrow \text{régime fortement turbulent}$$

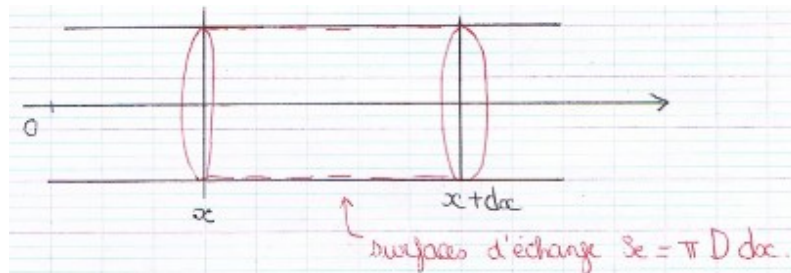
$$\text{Pour calculer Nu, on utilise } P_r = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{10^{-3} \cdot 4,18 \cdot 1000}{0,64} = 6,53$$

**Conclusion : on se trouve dans le domaine où les 3 méthodes sont valables.**

2.1 Faire un bilan du flux de puissance échangé en utilisant une "tranche de fluide" d'épaisseur  $dx$ , circulant dans le tube

Quantité de chaleur reçue par seconde ?

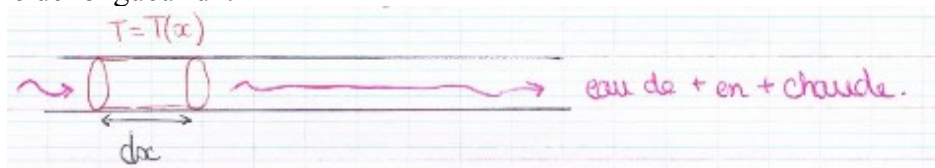
Étudions les échanges existant avec une tranche de fluide, d'épaisseur  $dx$ , entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$ . La surface d'échange totale est de forme cylindrique, et de valeur  $S_e = \pi D \cdot dx$  (cf figure).



On peut écrire:  $(\text{masse} / \text{s}) \cdot c_p dT = J / \text{seconde}$ . Remarque :  $\rho V'$  s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} / \text{s}$   
 $\Rightarrow \rho V' c_p dT = a$  pour unité le Watt (relation A)

Remarque :  $dT$  est la variation de température du volume de fluide, constatée après la traversée de la tranche d'épaisseur  $dx$ . Au cours de cette traversée, on suppose qu'il a reçu ce qui a été échangé par convection (on suppose l'équilibre thermique).

Ensuite, la loi de Newton nous dit que le flux de chaleur reçu par seconde vaut :  $h_c S_e (T_p - T)$  avec  $S_e = \pi D dx$ . Et  $h_c S_e (T_p - T)$  correspond à l'énergie échangée par seconde par convection dans la tranche de longueur  $dx$ .



Si de plus on suppose qu'on est en équilibre, c'est à dire que la température en un point est stationnaire, alors la variation d'énergie de la tranche de fluide (relation (A)) est égale à l'énergie échangée par convection sur la surface d'échange  $S_e$ . Ce qui permet d'écrire, en notant  $T_p$  la température de la paroi intérieure au tube, :

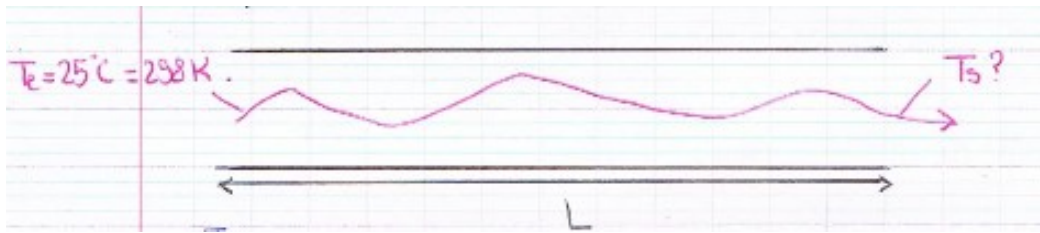
$$h_c S_e (T_p - T) = \rho V' c_p dT \Leftrightarrow h_c \pi D dx (T_p - T) = \rho V' c_p dT$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{h_c \pi D}{\rho V' c_p} dx = \frac{dT}{T_p - T}} \quad \text{(C)} ; \text{équation qui servira de point de départ au calcul sur tout le tube.}$$

Remarque : nous faisons l'étude sur une longueur infinitésimale  $dx$ , et on suppose que  $dT$  est négligeable devant  $T_p - T$ , ce qui revient à considérer que  $T \approx c^{te}$  entre  $x$  et  $x+dx$ . Ceci n'empêche pas  $T$  d'augmenter progressivement le long du tube, entre  $T_e$  (température à l'entrée) et  $T_s$  (à la sortie).

2.2 En intégrant cette relation, en déduire une expression donnant la température en sortie du tube.

Pour trouver la température en sortie (notée  $T_s$ ), on va intégrer la relation précédente entre  $x=0$  et  $x=L$  ( $L$ , longueur totale du tube). Dit autrement, entre l'abscisse  $x=0$  et  $x=L$ , la température passe de  $T_e = 25^\circ \text{C} = 298\text{K}$  à  $T_s$



Le calcul s'effectue en calculant l'intégrale première de la relation (C) :  $\int_{T_e}^{T_s} \frac{dT}{(T_p - T)} = \int_0^L \frac{h_c \pi D}{\rho V' c_p} dx$

$$\Leftrightarrow [-\ln(T_p - T)]_{T_e}^{T_s} = \int_0^L \frac{h_c \pi D}{\rho V' c_p} dx = \frac{h_c \pi D}{\rho V' c_p} L$$

$$\Leftrightarrow -\ln(T_p - T_s) + \ln(T_p - T_e) = \frac{h_c \pi D}{\rho V' c_p} L \Leftrightarrow \ln \frac{(T_p - T_e)}{(T_p - T_s)} = \frac{h_c \pi D}{\rho V' c_p} L$$

$$\Leftrightarrow \frac{(T_p - T_e)}{(T_p - T_s)} = e^{\frac{h_c \pi DL}{\rho V' c_p}}$$

Soit  $T_s = T_p - (T_p - T_e)e^{-\frac{h_c \pi DL}{\rho V' c_p}}$ , qui s'écrit aussi :  $T_s = T_p(1 - e^{-\frac{h_c \pi DL}{\rho V' c_p}}) + T_e e^{-\frac{h_c \pi DL}{\rho V' c_p}}$

Le premier terme correspondant au régime permanent (si  $L \rightarrow \infty$ ,  $T_s \rightarrow T_p$ ), et le second au régime transitoire d'évolution de la température du fluide (le fluide "oublie" la température à l'entrée).

On notera aussi que, compte tenu de l'évolution exponentielle de la température, il faudrait une longueur de tube infinie pour que le fluide atteigne la température de la paroi. Il convient donc de trouver un compromis entre la longueur de tube et la température atteinte. On pourrait ainsi définir une "constante de longueur", analogue à la constante de temps utilisée dans les circuits électriques type RC ou RL (du premier ordre).

**Calcul du coefficient de convection  $h_c$ .**

2.3 Calculer le nombre de Reynolds pour l'eau, et préciser le type d'écoulement considéré.

D'après les réponses aux questions précédentes,  $Re = 84750 \Rightarrow$  régime fortement turbulent

2.4 Calculer le nombre de Prandtl, et rappeler le nombre de Nusselt

$Pr = 6,53$  (calculé précédemment aussi).

2.5 En utilisant les formules de Petukhov et Gnielinsky, calculer Nu,  $h_c$

Pour calculer le nombre de Nusselt, on va utiliser Petukhov et Gnielinski, et ensuite, on utilisera le fait que  $Nu = \frac{h_c D}{\lambda}$  pour (enfin) arriver à  $h_c$ .

$$Nu = \frac{(Re - 100) \cdot Pr}{(2,234 \ln(Re) - 4,369)[(2,234 \ln(Re) - 4,639) + 1,27 \cdot (Pr^{\frac{2}{3}} - 1)]} \simeq 500$$

$\Rightarrow h_c = \frac{500 \cdot 0,64}{2,5 \cdot 10^{-2}} \simeq 12800 \text{ W.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  (en arrondissant le résultat à 3 chiffres significatifs)

2.6 En déduire la température de sortie ainsi que le flux thermique échangé dans le tube.

Grâce à la valeur calculée précédemment pour  $h_c$ , on peut maintenant calculer la température en

sortie  $T_s$ , avec :  $T_s = T_p - (T_p - T_e) e^{-\frac{h_c \pi DL}{\rho V' c_p}}$ , et on pose  $X = \frac{h_c \pi DL}{\rho V' c_p}$ , qui simplifie l'expression de

$$T_s \text{ en } T_s = T_p - (T_p - T_e) e^{-X}. \text{ Le calcul de X donne } X = \frac{12800 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 4,5}{1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 4180} \simeq 0,68.$$

$$T_s = T_p - (T_p - T_e) \cdot e^{-X} = 423 - (423 - 298) e^{-0,68} = 423 - 125 \cdot e^{-0,68} = 423 - 75 = 355\text{K} \simeq \mathbf{85^\circ C = T_s}$$

Le flux thermique échangé est directement calculable :  $\varphi = \rho V' c_p \Delta T$  (en W)

Application numérique :

$$\varphi = h_c D \cdot L \cdot \pi \cdot \Delta T = 12928 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 4,5 (150 - 85) \cdot \pi = 296994 \text{ W} \simeq 297 \text{ kW}$$

2.7 En utilisant la formule de Sieder et Sate simplifiée, calculer la valeur de la température de l'eau à la sortie du tube, ainsi que le flux échangé.

$$\text{Avec Sieder Sate : } Nu = 0,027 \cdot R_e^{0,8} \cdot P_r^{0,33} = 442,6 \Rightarrow h_c = \frac{Nu \lambda}{D} = 11317 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$T_s = 79,6^\circ \text{C} \text{ et } \varphi = 378 \text{ kW} \quad (\rho V' c_p (T_s - T_e) = 1,66 \cdot 4180 \cdot (79,7 - 25))$$

2.8 Comparer les résultats et conclure quand à la précision des méthodes utilisées.

La précision n'est pas meilleure que 5% ici. Ce sont des méthodes issues de l'expérience, donc limitées en précision, mais qui ont le mérite de simplifier énormément l'étude.

2.9 Refaire les calculs pour une température de l'eau à l'entrée égale à

a)  $15^\circ \text{C}$  (température de l'eau en été)

$$\text{Le calcul donne } T_s = 72,88^\circ \text{C} \text{ et } \boxed{\varphi = 1000 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 4180 \cdot (72,88 - 15) = 387,1 \text{ kW}}$$

b)  $5^\circ \text{C}$  (température de l'eau en hiver)

$$\text{On trouve } T_s = 67,85^\circ \text{C} \text{ et } \boxed{\varphi = 1000 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 4180 \cdot (67,85 - 5) = 420,3 \text{ kW}}$$

Rappel : pour  $T_e = 25^\circ \text{C}$ ,  $\varphi = 380 \text{ kW}$ .

Conclusion : on constate que le flux thermique échangé augmente quand  $T_e$  diminue. Il faudrait étudier plus complètement le comportement de  $\varphi$ , au cas où il existerait un maximum.